5.7 A Função Logarítmica Natural

Considere a curva dada pela função $y = 1/x$, apenas para valores tais que $x > 0$. Para qualquer número real $a > 0$, considere a região definida pelas retas $x = 1$ e $x = a$ e as curvas $y \geq 0$, $y \leq \dfrac{1}{x}$, como visto na figura 5.12.

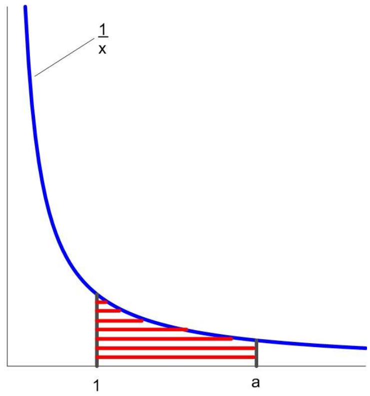

Figura 5.12: Representação geométrica de $\ln(a)$.

Para todo número real $a > 0$ é possível obter a área dessa região e, além disso, quaisquer dois números diferentes produzem valores de áreas diferentes. Portanto, é possível definir uma relação entre todo número real $a > 0$ e a sua área, denotado por $ln(a)$, como apresentado a seguir.

$$\begin{array}{rccc} \ln: & \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & a & \mapsto & \ln(a) \end{array} \tag{5.5}$$

Como a função $f(x) = 1/x$ é positiva, segue que o cálculo da área ra região fica dada pelo cálculo de integral definida, de 1 a a da função $f(x) = 1/x$, que leva a seguinte definição.

Definição 5.7.1 *A função Logarítmica Natural é a função definida por*

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt, \quad x > 0.$$

Vamos a algumas propriedades importantes sobre esta função.

1. O valor de $\ln(1)$ é obtido quando $a = 1$. Assim,

$$\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}dt = 0.$$

2. Se $0 < a < 1$ a área é definida de maneira oposta (visto que é preciso percorrer o eixo x da direita para a esquerda) e, por isto, tem-se que a área é indicada com o sinal negativo. Em outras palavras, se $0 < a < 1$, segue que

$$\ln(a) = \int_1^a \frac{1}{t}dt = -\int_a^1 \frac{1}{t}dt.$$

A principal consequência da definição de logaritmo está relacionada com a sua derivada, como visto a seguir.

Teorema 5.7.1 *A derivada da função* $\ln(x)$*, para* $x > 0$*, é* $\frac{1}{x}$.

Demonstração: Como f é uma função contínua em $[a,b]$, é possível aplicar o primeiro teorema fundamental do cálculo na definição da função logarítmica, ou seja:

$$D_x\left(\ln(x)\right) = D_x\left(\int_1^x \frac{1}{t}dt\right) = \frac{1}{x}. \tag{5.6}$$

□

Generalizando...

Teorema 5.7.2 *Se* u *é uma função diferenciável de* x *e* $u(x) > 0$*, então* $D_x\left(\ln(u)\right) = \frac{1}{u}D_x(u)$.

Demonstração: Aplicando a regra da cadeia e o primeiro teorema fundamental do cálculo tem-se o resultado. □

Agora, vamos a alguns exemplos.

Exemplo 5.7.1 *Encontre a derivada de cada uma das funções a seguir.*

1. $g(x) = \ln(x^2+6)$;
2. $g(x) = \ln(3x^2-6x+8)$;
3. $g(x) = \ln(\sqrt{x+1})$;
4. $g(x) = \ln((4x^2+3)(2x-1))$.

Solução:

1. Tomando $f(x) = x^2+6$, segue que

$$d_x(g(x)) = \frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{1}{x^2+6}(x^2+6)' = \frac{2x}{x^2+6}.$$

2. Tomando $f(x) = 3x^2-6x+8$, segue que

$$d_x(g(x)) = \frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{1}{3x^2-6x+8}(3x^2-6x+8)' = \frac{6x-6}{3x^2-6x+8}.$$

3. Tomando $f(x) = \ln(\sqrt{x+1})$, segue que

$$d_x(g(x)) = \frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}(\sqrt{x+1})' = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} =$$

$$= \frac{1}{2(x+1)}.$$

4. Tomando $f(x) = (4x^2+3)(2x-1)$, segue que

$$d_x(g(x)) = \frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{1}{(4x^2+3)(2x-1)}((4x^2+3)(2x-1))' =$$

$$= \frac{1}{(4x^2+3)(2x-1)}(8x^3-4x^2+6x-3)' = \frac{24x^2-8x+6}{(4x^2+3)(2x-1)}.$$

□

A seguir são apresentados alguns resultados similares aos conhecidos para a função logarítmica da álgebra elementar.

Teorema 5.7.3 *Se a e b são números positivos quaisquer, então*

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Demonstração: Considere a função $f(x) = \ln(ax)$, com $x > 0$. Então, $f'(x) = \frac{1}{ax}D_x(ax) = \frac{1}{x}$, ou seja, as funções $\ln(x)$ e $f(x)$ possuem a mesma derivada. Logo, pelo Teorema 5.1.1 segue que $\ln(ax) = \ln(x) + K$, onde K é uma constante. Considerando $x = 1$, segue que $\ln(a) = \ln(x1) + K = K$. Portanto, $\ln(ax) = \ln(x) + \ln(a)$, para todo x. Considerando $x = b$, segue que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. □

Uma consequência desse resultado é apresentado no Corolário a seguir.

Corolário 5.7.1 *Se $a > 0$ é um número positivo qualquer e se $r \in \mathbb{Q}$, então*

$$\ln(a^r) = r\ln(a).$$

Demonstração: Tem-se que $D_x(\ln(x^r)) = \frac{1}{x^r} \times D_x(x^r) = \frac{r}{x}$. Por outro lado, $D_x(r\ln(x)) = \frac{r}{x}$. Assim, pelo Teorema 5.1.1, segue que $\ln(x^r) = r\ln(x) + K$, para todo x. Logo, considerando $x = 1$, segue que $\ln(1^r) = r\ln(1) + K \Rightarrow 0 = \ln(1^r) = K \Rightarrow K = 0$.
Portanto, $\ln(a^n) = n\ln(a)$. □

Exemplo 5.7.2 *Encontre a derivada de cada uma das funções a seguir.*

1. $f(x) = \ln((2x-1)^3)$*;*

2. $f(x) = \ln(\sqrt{(3x^2-4x+6)})$*.*

Solução:

1. Tem-se que $f(x) = \ln((2x-1)^3) = 3\ln(2x-1)$, logo $f'(x) = 3\frac{1}{2x-1}(2x-1)' = \frac{6}{2x-1}$.

2. Tem-se que $f(x) = \ln(\sqrt{(3x^2 - 4x + 6)}) = \ln((3x^2 - 4x + 6)^{1/2}) = \frac{1}{2}\ln(3x^2 - 4x + 6)$. Assim,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{3x^2 - 4x + 6}(3x^2-4x+6)' = \frac{6x - 4}{2(3x^2 - 4x + 6)} = \frac{3x - 2}{3x^2 - 4x + 6}.$$

□

Corolário 5.7.2 *Se* $a > 0$ *então* $\ln(1/a) = -\ln(a)$.

Demonstração: Tem-se que:

$$0 = \ln(1) = \ln(a/a) = \ln(1/a * a) = \ln(1/a) + \ln(a) \Rightarrow \ln(1/a) = -\ln(a).$$

□

Corolário 5.7.3 *Se* $a, b > 0$ *então* $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$.

Demonstração: De fato, tem-se que

$$\ln(a) = \ln(a/b * b) = \ln(a/b) + \ln(b) \Rightarrow \ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b).$$

□

É possível utilizar o processo chamado de "Diferenciação Logarítmica" para encontrar a derivada de funções, quando a equação é complexa. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 5.7.3 *Encontre* $\frac{dy}{dx}$, *sendo* $y = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}$.

Solução: Tem-se que

$$|y| = \left|\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}\right| = \frac{|\sqrt[3]{x+1}|}{|(x+2)||\sqrt{x+3}|}.$$

Aplicando o logaritmo natural nos dois lados da igualdade, tem-se:

$$\ln(|y|) = \ln\left(\frac{|\sqrt[3]{x+1}|}{|(x+2)||\sqrt{x+3}|}\right) = \ln(|\sqrt[3]{x+1}|) - \ln(|(x+2)|) - \ln(|\sqrt{x+3}|) =$$

$$= \frac{1}{3}\ln(|x+1|) - \ln(|(x+2)|) - \frac{1}{2}\ln(x+3).$$

Logo, derivando em relação a x os dois lados da igualdade, segue que:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\frac{1}{x+1}(x+1)' - \frac{1}{x+2}(x+2)' - \frac{1}{2}\frac{1}{x+3}(x+3)' =$$

$$= \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}\right) \times \left(\frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+3)}\right).$$

□

Sobre a construção do gráfico da função logarítmica: sendo $f(x) = \ln(x)$, tem-se que $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, para todo $x > 0$, ou seja, a função logarítmica é crescente para todo $x > 0$. Além disso, segue que f é contínua para todo $x > 0$, visto que ela é diferenciável em todos os pontos $x > 0$.
Tem-se ainda que $f''(x) = (f'(x))' = \frac{(1)'x - 1(x)'}{x^2} = \frac{-1}{x^2} < 0$, para todo $x > 0$. Dessa forma, o gráfico da função f é côncavo para todo $x > 0$. Um esboço do gráfico da função logarítmica natural fica dado pela Figura 5.13.

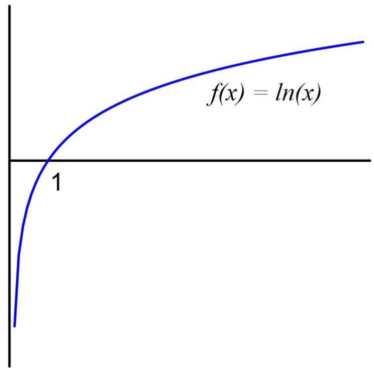

Figura 5.13: Esboço do gráfico da função $f(x) = \ln(x)$.

Teorema 5.7.4

$$\int \frac{1}{u} du = ln|u| + c.$$

Demonstração: Imediato da definição e do primeiro teorema fundamental do cálculo. □

Exemplo 5.7.4 *Calcule cada uma das integrais a seguir.*

1. $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx;$
2. $\int \frac{x^2+2}{x+1} dx;$
3. $\int \tan(x);$

Solução:

1. Considere $u = x^3 + 1$. Então, tem-se que $du = 3x^2 du$ e, consequentemente, segue que $\frac{du}{3} = x^2 dx$. Assim,

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx = \frac{1}{x^3+1}(x^2 dx) = \int \frac{1}{u}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u} du = \frac{1}{3}\ln(|u|) + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{x^3+1} dx = \frac{\ln(|x^3+1|)}{3} + k.$$

2. Usando divisão de polinômios, segue que $\dfrac{x^2+2}{x+1} = x-1+\dfrac{3}{x+1}$. Assim,

$$\int \frac{x^2+2}{x+1}dx = \int \left(x-1+\frac{3}{x+1}\right) = \int xdx - \int dx + 3\int \frac{1}{x+1}dx.$$

Chamando $u = x+1$, segue que $du = dx$ e, consequentemente, $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln(|u|)+k = \ln(|x+1|)+k$. Portanto,

$$\int \frac{x^2+2}{x+1}dx = \frac{x^2}{2} - x + 3\ln(|x+1|) + k.$$

3. Tem-se que $\tan(x) = \dfrac{sen(x)}{\cos(x)}$. Assim, chamando $u = \cos(x)$, segue que $du = -sen(x)dx$ e, assim:

$$\int \tan(x) = \int \frac{1}{\cos(x)}(-sen(x)dx) = -\int \frac{1}{u}du = -\ln(|u|)+c =$$

$$= -\ln(|\cos(x)|)+k = \ln(|\cos(x)|^{-1})+k = \ln(|\sec(x)|)+k.$$

□

Algumas integrais trigonométricas podem ser observadas no resultado a seguir.

Teorema 5.7.5 *1.* $\int \tan(u) = \ln(|\sec(u)|)+k$;

2. $\int \cot(u) = \ln(|sen(u)|)+k$;

3. $\int \sec(u) = \ln(|\sec(u)+\tan(u)|)+k$;

4. $\int cossec(u) = \ln(|cossec(u)-\cot(u)|)+k$;

5.8 Exercícios

Exercício 5.8.1 *Encontre a derivada de cada uma das funções a seguir.*

(a) $y = \ln(|x^3+1|)$; **(b)** $y = \ln(|\cos(3x)|)$; **(c)** $y = \ln(|tg(4x)+\sec(4x)|)$;

(d) $y = \ln\left(\left|\dfrac{3x}{x^2+4}\right|\right)$; **(e)** $y = \ln(|x^2(x^2-1)^3(x+2)^4|)$; **(f)** $h(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$;

(g) $f(x) = \ln(|4+5x|)$; **(h)** $f(x) = \ln(\sqrt{4+5x})$; **(i)** $f(t) = \ln(3t+1)^2$;

(j) $f(t) = \ln^2(3t+1)$; **(k)** $g(y) = \ln(|sen(5y)|)$; **(l)** $f(x) = \cos(\ln(x))$.

Exercício 5.8.2 *Calcule cada uma das integrais a seguir.*

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3-2x}$; **(b)** $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+4}dx$; **(c)** $\displaystyle\int \frac{3x^2}{5x^3-1}dx$; **(d)** $\displaystyle\int \frac{\cos(t)}{1+2sen(t)}dt$;

(e) $\displaystyle\int cotg(5x) + cossec(5x)dx;$ **(f)** $\displaystyle\int \frac{2x^3}{x^2-4}dx;$ **(g)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln(x)};$

(h) $\displaystyle\int \frac{\cos(t)}{1+2sen(t)}dt;$ **(i)** $\displaystyle\int \frac{2-3sen(2x)}{\cos(2x)}dx;$ **(j)** $\displaystyle\int \frac{\ln^2(3x)}{x}dx.$

Exercício 5.8.3 *Faça um esboço do gráfico da função* $f(x) = |\ln(x)|$.

Exercício 5.8.4 *Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da curva* $y = x^2 + \ln(2x-5)$ *no ponto do gráfico de abscissa* 3.

Exercício 5.8.5 *Ache a área da região limitada pela curva* $y = \dfrac{x}{2x^2+4}$, *pelo eixo* x, *pelo eixo* y *e pela reta* $x = 4$.